1. FICHA 3: Determinación de asíntotas. Soluciones.

TAREA

Determina el dominio y las asíntotas de las funciones siguientes, representando la posición relativa de la función en relación a dichas asíntotas:

$$a. \quad f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5}, \qquad (Ext.PAU - 2019)$$

Solución:

Para determinar el dominio de la función debemos calcular las raíces del polinomio que figura en el denominador de la función. En este caso, se observa que

$$x^2 + 2x + 5 \neq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

En efecto, esto es así, ya que al resolver la ecuación de segundo grado, se obtienen soluciones complejas.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i \in \mathbb{C}$$

Por tanto,

$$\boxed{Dom(f) = \mathbb{R}}$$

Asíntotas verticales: no hay, al tratarse de una función racional sin polos (valores que anulen el denominador)

Asíntotas horizontales: Diremos que la recta $y = b$ es una *asíntota horizontal* para f si existe alguno de los dos límites,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x), \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

con valor finito. En nuestro caso, se observa que ninguno de los dos límites existe, ya que al comparar grados,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

Por tanto, no hay asíntotas horizontales para f.

Asíntotas oblicuas: Diremos que la función f posee asíntota oblicua, $y = m \cdot x + n$, si existen los límites,

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - m \cdot x)$$

con valor real finito.

En este caso, es fácil comprobar que los cálculos son idénticos tanto si hacemos tender x a $+\infty$ como a $-\infty$. Por comodidad en la notación escribiremos $x \to \infty$, donde se incluyen ambos casos.

Para determinar el valor de m, debemos calcular el límite,

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^3 + 2x^2 + 5x} = 1$$

donde se han comparado grados.

Para determinar el valor de n, aplicamos la fórmula dada con $m = 1$,

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - m \cdot x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} - x \right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\frac{\cancel{x^3} + x^2 + \cancel{5x} - 3 - \cancel{x^3} - 2x^2 - \cancel{5x}}{x^2 + 2x + 5} \right] = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2 - 3}{x^2 + 2x + 5} = -1$$

Por tanto, la función tiene una asíntota oblicua, en la recta:

$$\boxed{y = x - 1}$$

La posición relativa de la función en relación a esta asíntota, se determina dando valores a x. Así,

$$Si \quad x = +10, \to f(+10) = \frac{10^3 + 10^2 + 5 \cdot 10 - 3}{10^2 + 2 \cdot 10 + 5} = \frac{1147}{125} = 9{,}176 > 9$$

Y la asíntota oblicua, para dicha abscisa, tiene por ordenada

$$a(10) = 10 - 1 = 9$$

Por tanto $f(10) > a(10)$, y la función se encuentra por encima de la asíntota, cuando $x \to +\infty$.

Para valores negativos, podemos tomar $x = -10$, y determinar,

$$f(-10) = \frac{-953}{85} = -11{,}21 < -11 = a(-10)$$

por tanto la función se encuentra por debajo de su asíntota cuando $x \to -\infty$. Toda esta información queda reflejada en la siguiente gráfica de la figura 1. También se observa el comportamiento global de la función estudiada.

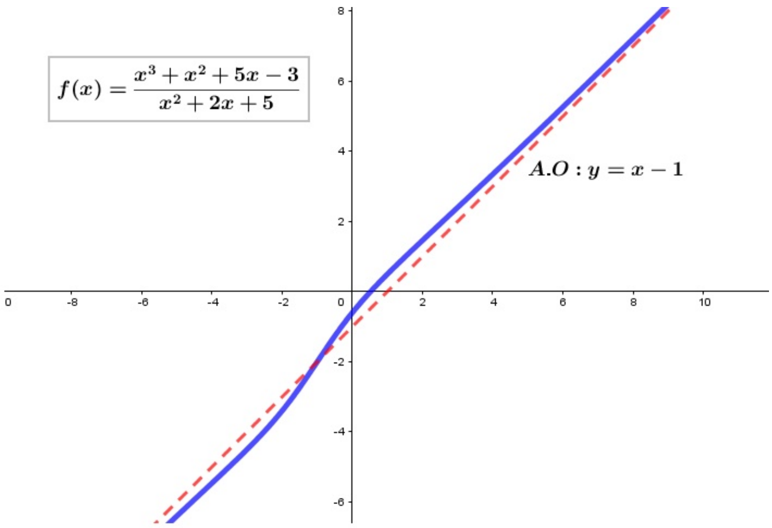

Figura 1: *Representación gráfica de la función f (en azul) y su asíntota oblicua $y = x-1$ (en rojo).*

Apartado (b)

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad (Ext.PAU-2020)$$

Para determinar el dominio de la función g debemos procurar que el radicando sea estrictamente positivo. Debemos resolver la inecuación

$$x^2-1>0$$

Calculando las raíces del polinomio $p(x) = x^2-1$, y estudiando su signo, se observa que

$$x^2-1>0, \quad si \quad x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

Por tanto este es el dominio de la función.

$$\boxed{Dom(g) = (-\infty,-1)\cup(1,+\infty) = \mathbb{R}-[-1,1]}$$

Observamos que **existe una banda en el plano, donde no hay función!**

Asíntotas verticales: Los valores en los que el denominador se anula son: $x=\pm 1$. Debemos estudiar el comportamiento de la función alrededor de la asíntota.

Para $x=1$, sólo podemos calcular el límite lateral por la derecha, porque no existe función a la izquierda de 1. En tal caso,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1, x>1} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Esto es suficiente para probar que en $x=1$ existe una asíntota vertical.

Análogamente, para $x = -1$, sólo podemos calcular el límite lateral por la izquierda (por la derecha de -1 no hay definida función alguna). En tal caso, escribiremos:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1, x<-1} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

i.e., existe otra asíntota vertical en $x = -1$.

Asíntotas horizontales: Calculando los límites en $+\infty$ y en $-\infty$, tendremos:

$$y = b = \lim_{x\to +\infty} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{|x|} = +1$$

La recta $y = 1$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$. Al ser

$$f(+10) = \frac{10}{\sqrt{99}} > 1 = a(10)$$

la función se encuentra por encima de su asíntota.

Análogamente, por el otro lado, haríamos:

$$b = \lim_{x\to -\infty} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{|x|} = -1$$

La recta $y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$. Al ser

$$f(-10) = \frac{-10}{\sqrt{99}} < -1 = a(10)$$

la función se encuentra por debajo de su asíntota.

Asíntotas oblicuas: Como ya se han determinado dos asíntotas horizontales, no hay asíntotas oblicuas para g.

Con toda la información, dibujamos la gráfica de la función, tal como se aprecia en la figura 2.

Apartado (c)

$$h(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3-x^2}}, \qquad (Ord.PAU - 2020)$$

Observar que la función h se puede expresar en la forma,

$$h(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3-x^2}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2(x-1)}} = \frac{x^2+1}{|x| \cdot \sqrt{x-1}}$$

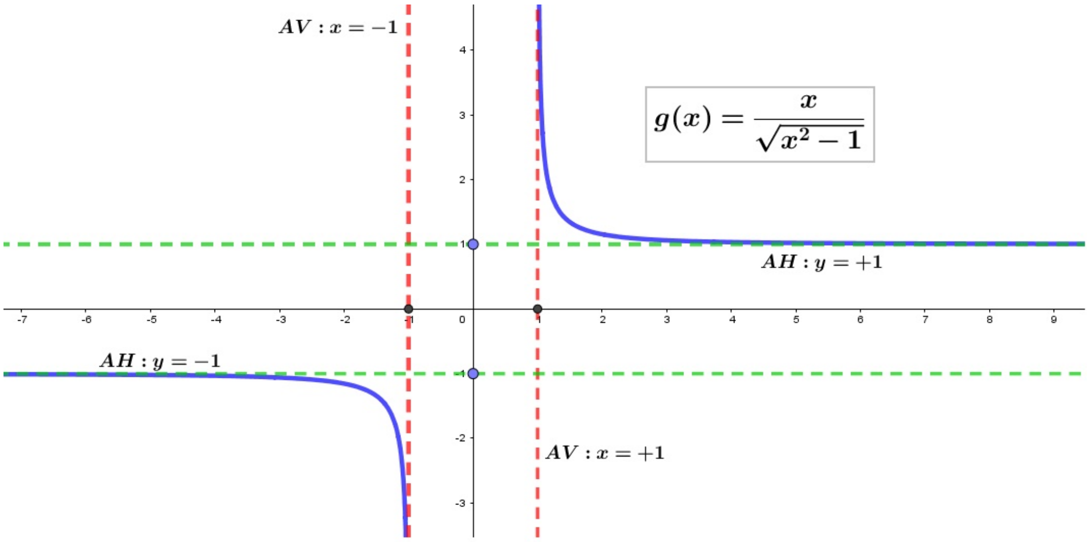

Figura 2: *Representación gráfica de la función g (en azul) y sus asíntotas (en rojo las verticales y en verde las horizontales).*

En cualquier caso, para determinar el dominio debemos resolver la inecuación:

$$x^3 - x^2 > 0$$

Las soluciones de la ecuación

$$x^3 - x^2 = x^2(x-1) = 0$$

son $x = 0$ y $x = 1$, El signo de la función sólo depende del factor $x - 1$. Por tanto,

$$x^3 - x^2 > 0 \leftrightarrow x - 1 > 0 \leftrightarrow x > 1$$

El dominio es por tanto,

$$\boxed{Dom(h) = (1, +\infty)}$$

Esto es importante, ya que nos elimina del estudio los casos en los que x tiende a $-\infty$.

Asíntotas verticales: Los valores en los que el denominador se anula son: $x = 0$ y $x = 1$. Debemos estudiar el comportamiento de la función en torno a estos puntos.

Para $x = 0$ no tiene sentido, ya que la función no está definida para valores menores que 1.

$$0 \notin Dom(h)$$

Luego no hay asíntota en $x = 0$ por la propia definición del dominio. En cambio para $x = 1$, sólo tenemos que estudiar el límite cuando nos acercamos por la derecha. En tal caso,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1, x > 1} \frac{x^2 + 1}{|x| \cdot \sqrt{x-1}} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

En consecuencia, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de h.

Asíntota horizontal: Sólo debemos estudiar en este caso la existencia de asíntota cuando x tiende a $+\infty$. Sin embargo,

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3-x^2}} = +\infty$$

ya que el numerador posee grado 2, y el denominador potencia $\frac{3}{2} < 2$. Por tanto no hay asíntota horizontal.

Asíntota oblicua: Este es un ejemplo, de que en ocasiones podemos determinar el valor de m, con valor finito y no hay asíntota oblicua. En efecto,

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2\cdot\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-1}} = 1\cdot 0 = 0$$

Es decir, $m = 0$. Pero entonces,

$$n = \lim_{x\to+\infty} (h(x) - m\cdot x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$$

Por tanto, no se puede determinar el valor de n y no hay tampoco asíntota oblicua. La gráfica de la función se observa en la figura 3. Observar que existe un comportamiento asintótico hacia la función $y = \sqrt{x}$. Esto es lógico, si en el numerador y el denominador de la expresión de h nos quedamos con las potencias de mayor grado, que son las que provocan la tendencia. En tal caso, tendríamos la aproximación asintótica:

$$h(x) \approx \frac{x^2}{\sqrt{x^3}} = \frac{x^2}{x\cdot\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

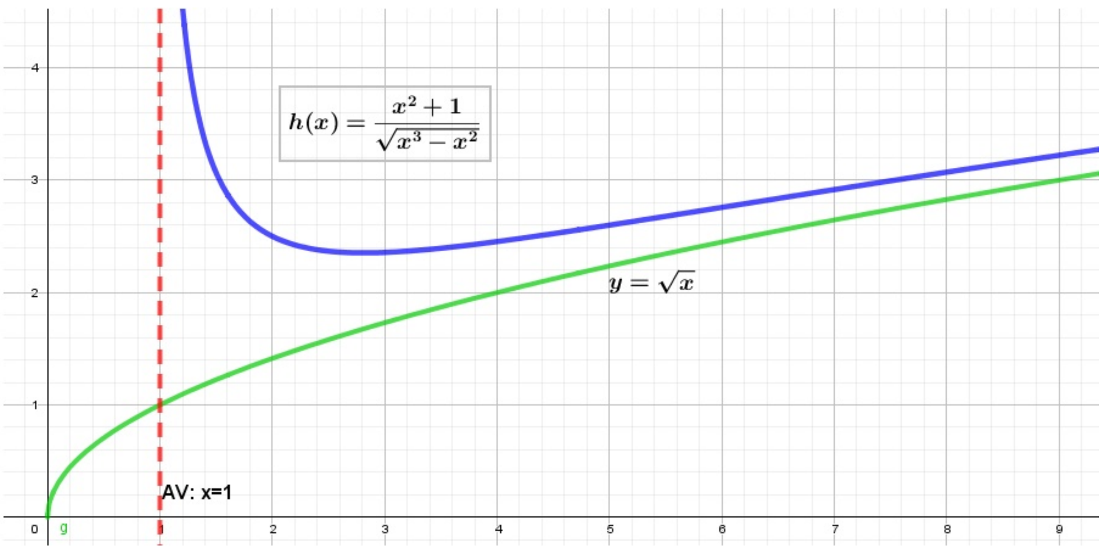

Figura 3: *Representación gráfica de la función h (en azul), su asíntota vertical en $x = 1$, y la función $y = \sqrt{x}$, en verde, hacia la que parece aproximarse cuando x tiende a $+\infty$.*

Apartado (d)

$$i(x) = x \cdot e^{-x^2}, \qquad (Ord.PAU - 2019)$$

En primer lugar observamos que la función se puede expresar en forma de cociente,

$$i(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$$

Además $i(-x) = -i(x)$. Por tanto se trata de una función impar, o simétrica respecto del origen.

Puesto que la exponencial nunca se anula,

$$e^x \neq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

no hay valores que anulen el denominador. En consecuencia,

$$\boxed{Dom(i) = \mathbb{R}}$$

y se trata de una función continua.

Asíntotas verticales: No hay, al no anularse nunca el denominador.

Asíntotas horizontales: Debemos estudiar los límites cuando x tiende a $+\infty$ y a $-\infty$. En tal caso, escribiremos:

$$\lim_{x\to+\infty} i(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0$$

ya que

$$x^n << a^x, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad x \to +\infty$$

Lo mismo sucede cuando x tiende a $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} i(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{e^{(-x)^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{e^{x^2}} = 0$$

Además, para $x = 10$,

$$i(10) = \frac{10}{e^{100}} > 0$$

la función se encuentra por encima de la asíntota. Y para $x = -10$,

$$i(-10) = \frac{-10}{e^{100}} < 0$$

la función se encuentra por debajo de la asíntota.

Por último notar que como hay dos asíntotas horizontales no hay oblicuas. La representación gráfica de esta curiosa función continua se observa en la figura 4.

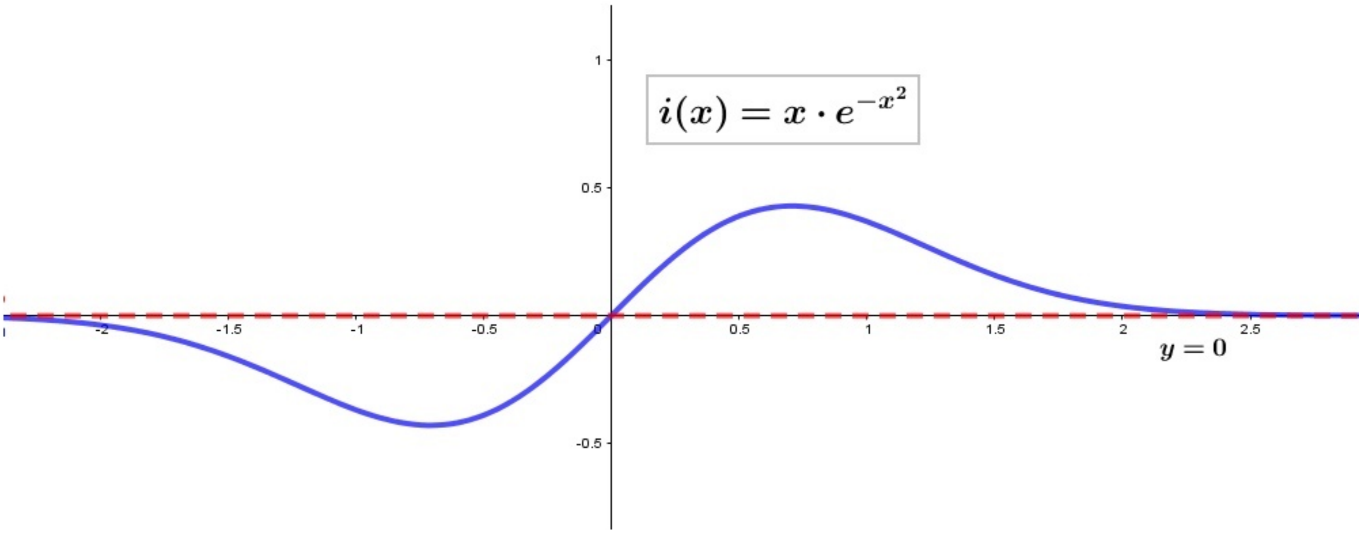

Figura 4: *Representación gráfica de la función i (en azul), con su única asíntota horizontal (en rojo), situada sobre el eje OX.*

Apartado (e)

$$j(x) = \frac{ln(1+x)}{x}, \qquad (Ord.PAU)$$

Para determinar el dominio de esta función, debemos plantear la inecuación

$$1 + x > 0, \qquad x \neq 0$$

ya que la función logaritmo sólo está definida para números reales positivos. En tal caso,

$$x > -1, \qquad x \neq 0$$

Esto nos lleva a que el dominio de la función se puede expresar en la forma:

$$\boxed{Dom(j) = (-1, 0) \cup (0, +\infty) = (-1, +\infty) - \{0\}}$$

Asintotas verticales: Los posibles valores donde la función puede presentar asíntotas verticales son $x = 0$ y $x = -1$. Estudiamos el comportamiento de la función alrededor de estos puntos.

Para $x = 0$, se comprueba que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$$

A este resultado se puede llegar elaborando una tabla con valores próximos a cero, tanto positivos como negativos. También se puede obtener fácilmente aplicando la *regla de L'Hôpital*. Por tanto, no existe asíntota vertical en este punto, habiendo una discontinuidad evitable.

En cambio para $x = -1$, solamente debemos estudiar un límite lateral, al no estar definida la función con valores menores que -1. En tal caso, escribiremos:

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to -1, x>-1} \frac{ln(1+x)}{x} = \frac{ln(0)}{-1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$$

donde se ha utilizado el hecho conocido que

$$\lim_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty$$

Por tanto existe una asíntota vertical en $x = -1$, y la función tiende a crecer con valores positivos cuando nos aproximamos por la derecha a este punto.

Asintota horizontal: Basta calcular el límite cuando x tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty} j(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{ln(1+x)}{x} = 0$$

donde se ha utilizado el hecho conocido que

$$log_a(x) << x^n, \qquad x \to +\infty$$

Por consiguiente la recta $y = 0$ es asíntota horizontal de j, y no hay asíntotas oblicuas.

La representación gráfica de esta función, con sus asíntotas se puede observar en la figura 5.

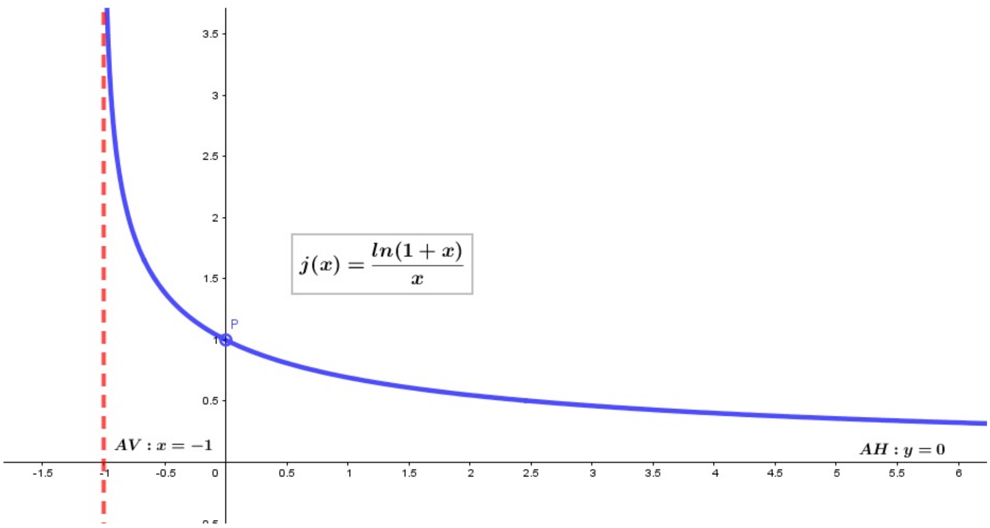

Figura 5: *Representación gráfica de la función j (en azul), con su única asíntota vertical en $x = -1$, un punto de discontinuidad evitable en $x = 0$, y una asíntota horizontal $y = 0$, sobre el eje OX positivo.*